

Rekombination und Ionisation in einer stationären Hochfrequenzentladung

Von H. SCHLÜTER *

The University of Texas, Austin, Texas, USA

(Z. Naturforschg. 18 a, 439—446 [1963]; eingegangen am 7. Dezember 1962)

A cool hydrogen plasma in a steady state rf-discharge in a static magnetic field is investigated spectroscopically. The recombination rate of this plasma is determined. The essential three-body recombinations are taken into account for levels of medium quantum number, where the inverse process—ionizations from excited levels—is considerably lowered. Measured population densities are used for the determination of the recombination rate. The considerations include the effects of energetic electrons the presence of which—in addition to the bulk of cool electrons—has been detected by probe measurements. Within the limits of error the ionization rate calculated for the energetic electrons agrees with the recombination rate of the cool electrons.

Die folgenden Untersuchungen befassen sich mit Rekombinations- und Ionisationsprozessen einer Plasmaballung unter praktisch identischen Bedingungen, wie sie in früheren Arbeiten^{1, 2} eingehend beschrieben sind: Es handelt sich dabei um eine stationäre Hochfrequenzentladung in einem statischen Magnetfeld von der Form einer „magnetischen Flasche“, an deren engsten Stellen die untersuchte Plasmaballung — scharf getrennt von der Umgebung — erscheint. Insbesondere ist die angekündigte^{2, 3} Untersuchung der Prozesse beschrieben, an denen Wasserstoffatome in mittleren angeregten Zuständen beteiligt sind.

In Teil I sind die benutzten Temperatur- und Dichtebestimmungen zusammengestellt. Charakteristisch für das hier betrachtete Hochfrequenzplasma ist die Anwesenheit zweier Elektronengruppen. Neben einer — spektroskopisch und mikrowellen-technisch erfaßten — Hauptgruppe relativ kalter Elektronen hoher Dichte ist eine zusätzliche Gruppe energiereicher Elektronen durch Sondenmessungen nachgewiesen. Teil I beschreibt auch die Bestimmung oder Abschätzung der Dichten von Atomen in den verschiedenen angeregten Zuständen. In Abschnitt II ist die Rate der Strahlungsrekombination berechnet. Dieser Rate wird in Teil III eine deutlich höhere Ionisationsrate für die energiereichen Elektronen gegenübergestellt. Eine dieser Ionisationsrate vergleichbare Rekombinationsrate ergibt sich in Teil IV, wo die Dreierrekombinationen in angeregte Zustände berücksichtigt sind: Die effektive Rekombi-

nationsrate ist zunächst aus der Balance zwischen den Dreierrekombinationsprozessen und den Gegenprozessen bestimmt, die für mittlere Hauptquantenzahlen nicht ausgeglichen ist. Anschließend wird als Bezugspunkt einer der tiefen angeregten Zustände gewählt und hier eine Bilanz der die Termleiter herunter- und hinaufführenden Prozesse betrachtet; hierbei ist die effektive Dreierrekombinationsrate nochmals bestimmt. In Teil V wird die erhaltene Rekombinationsrate, die im wesentlichen auf Messungen gestützt ist, im Hinblick auf die Ergebnisse theoretischer Untersuchungen (für eine Gruppe von Elektronen) diskutiert.

I. Temperatur- und Dichtebestimmung

Die betrachtete Plasmaballung emittiert ein so sauberes BALMER-Spektrum, daß die hohen Linien, ihre Verschmelzung und das Kontinuum quantitativ vermessen werden können. Der relative Verlauf der Kontinuumsintensität $\sim N_e N_i t_e^{-3/2} \exp(-h\nu/k t_e)$ ist zur Bestimmung der Elektronentemperatur t_e benutzt. Zusätzliche Absolutmessungen für das Kontinuum erlauben eine weitere Bestimmung der Elektronentemperatur bei bekannter Elektronendichte N_e . Die Elektronendichte ist bekannt von den Profilen mehrerer BALMER-Linien⁴ und von der Linienverschmelzung (ungefähr bei der Hauptquantenzahl $n = 20$), sowie mit hoher Genauigkeit durch Mikrowellenmessungen von LISITANO und TUTTER^{3, 5} unter praktisch identischen Versuchsbedingungen. Die ver-

* Beurlaubt vom Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München.

¹ H. SCHLÜTER, Z. Naturforschg. 15 a, 281 [1960].

² H. SCHLÜTER, Z. Naturforschg. 16 a, 972 [1961].

³ G. v. GIERKE, G. LISITANO, G. MÜLLER, H. SCHLÜTER, M. TUTTER u. H. WULFF, Proc. Fifth Int. Conf. on Ionization Phenomena in Gases, North Holland Publishing Co., Amsterdam 1961, Vol. I, p. 380 und Anhang.

⁴ E. FERGUSON u. H. SCHLÜTER, Ann. Phys., N. Y., in Vorbereitung.

⁵ G. LISITANO u. M. TUTTER, Z. Naturforschg. 16 a, 692 [1961].



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

schiedenen spektroskopischen Verfahren (unter Benutzung photographischer und photoelektrischer Beobachtungen entlang der Achse des Entladungsgefäßes und quer durch das Entladungsrohr und für verschiedene Schichten der Plasmaballung) ergeben gute Übereinstimmung untereinander und mit den Mikrowellenmessungen. Über Details dieser und folgender spektroskopischer Meßverfahren in ähnlichen Fällen wie hier ist ausführlicher an anderer Stelle berichtet^{2, 3, 4, 5}.

Die Intensitäten der hohen BALMER-Linien I_{2n} sind ebenfalls zur Ermittlung der Elektronentemperatur und -dichte herangezogen. Man kann erwarten, daß sich die Intensitäten der noch getrennt sichtbaren hohen Linien stetig an das Verschmelzungskontinuum anschließen, das seinerseits stetig in das Rekombinationskontinuum übergeht; der Emissionskoeffizient des Kontinuums ε_{r2} sollte im Bereich hoher Linien gut anwendbar sein und – multipliziert mit dem für eine Linie zur Verfügung stehenden Frequenzbereich $\Delta\nu = 2 X_H/h n^3$ – die Linienintensität $I_{2n} = (1/4\pi) N_e A_{2n} h \nu_{2n}$ ergeben. Im asymptotischen Fall (A_{2n} wird $3,5 g_2 8 \pi^2 e^2 \nu_{2n}^2/n^3 g_n m c^3$, der GAUNT-Faktor von ε_{r2} ist 0,87) ergibt sich daraus:

$$N_n = \frac{h^3}{(2\pi m)^{3/2}} N_e N_i n^2 (k t_e)^{-3/2} \exp(X_n/k t_e), \quad (1)$$

d. h. die SAHA-BOLTZMANN-Formel für die Temperatur und Dichte der Kontinuumselektronen. In der Tat liegen die Intensitäten der hohen BALMER-Linien, etwa bis H_{11} , praktisch auf einer Geraden, wenn man sie – dividiert durch $A_{2n} h \nu_{2n} n^2$ – logarithmisch gegen X_n aufträgt. Die Steigung dieser Geraden gibt nach Gl. (1) die Elektronentemperatur t_e , der Absolutwert der Linienintensitäten ergibt die Elektronendichte N_e . (Der Einfluß von Druckeffekten auf die Termabstände von der Kontinuumsgrenze ist hier gering.) Die sich ergebenden Temperatur- und Dichtewerte stimmen gut mit den Ergebnissen der zuvor genannten Verfahren überein. Damit ist nachgeprüft, daß im weiteren konsistente Temperatur- und Dichtewerte zur Beziehung thermodynamischer Besetzungszahlen [nach Gl. (1)] verwandt werden. Im folgenden ist der Fall $t_e = 2,5 \cdot 10^3$ °K und $N_e = 1,3 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ untersucht, der sich durch Konstanz der Versuchsbedingungen und durch Spektren mit geringem Untergrund auszeichnet.

Die relativen und absoluten Messungen der Linienintensitäten umfassen neben den hohen ($n \geq 11$) auch die mittleren und tiefen Linien, so daß die Dichten N_n der Atome in angeregten Zuständen bis

N_3 einschließlich bekannt sind. Tab. 1 gibt die Ergebnisse für die später in Teil IV im wesentlichen interessierenden Zustände in Einheiten thermodynamischer Besetzungszahlen N_n^{Saha} . Die – in Teil IV. 1

n	3	4	5	6	7	8	9	10
N_n/N_n^{Saha}	0,018	0,26	0,54	0,71	0,82	0,89	0,94	(0,98)

Tab. 1. Besetzungszahlen N_n in Einheiten N_n^{Saha} nach Gl. (1).

benutzten – Verhältnisse N_n/N_n^{Saha} sind aus relativen (photoelektrischen) Intensitätsmessungen bestimmt, wobei mit N_n^{Saha} zunächst die Besetzungszahlen gemeint sind, die auf der Verlängerung der Geraden bei hohen Quantenzahlen liegen (in einer $\log N_n/n^2 - \nu$ -Skala). Die – in Teil IV. 2 benutzten – N_n selbst ergeben sich dann, wenn N_n^{Saha} Gl. (1) entnommen wird, gestützt auf absolute Intensitätsmessungen bei den hohen Linien. Ebenso ergeben sich die N_n aus Absolutmessungen direkt bei den tiefen Linien. Für N_2 genügt es im folgenden, eine obere Grenze zu kennen; sie ist aus der Beobachtung gewonnen, daß die H_α -Linie nicht aus optisch dicker, zumindest nicht wesentlich optisch dicker Schicht ausgestrahlt wird. Die Zahl der Atome im Grundzustand/cm³ N_1 ist aus dem Gasdruck und der Neutralgastemperatur t_g zu $1,1 \cdot 10^{15}/\text{cm}^3$ berechnet; t_g ($\approx t_e$) ist aus der DOPPLER-Verbreiterung von H_β bestimmt.

Sondenmessungen ergeben, daß neben den relativ kalten, spektroskopisch (und mikrowellentechnisch) erfaßten Elektronen eine zusätzliche Gruppe energiereicher Elektronen geringerer Dichte vorhanden ist. Abschätzungen der Stoßzahlen bestätigen, daß solche energiereiche Elektronen nicht ins Temperaturliegengleichgewicht mit der Gruppe kalter Elektronen treten müssen. Für die zusätzliche Gruppe heißer Elektronen ergibt sich eine Temperatur T_e , die etwa 30mal höher ist als die spektroskopisch bestimmte; die zugehörige Elektronendichte n_e beträgt lediglich einige 10^9 cm^{-3} ; für die hier spezifisch betrachteten Versuchsbedingungen ergeben die Messungen $T_e \approx 7 \cdot 10^4$ °K ($6,5 - 7,5 \cdot 10^4$ °K) und $n_e \approx 3 \cdot 10^9 \text{ cm}^{-3}$ ($2,5 - 3,5 \cdot 10^9 \text{ cm}^{-3}$). Diese Werte liegen etwas höher als die Ergebnisse früherer vorbereitender Messungen für recht ähnliche Bedingungen, die schon die Anwesenheit zusätzlicher energiereicher Elektronen aufgezeigt hatten³. Für Einzelheiten der Meßverfahren sei auf diese früheren Untersuchungen verwiesen. Die Sondenmessungen machen es notwendig, im folgenden die Anwesenheit zusätz-

licher Elektronen zu beachten, die erheblicher Ionisation und Anregung vom Grundzustand aus fähig sind.

II. Strahlungsrekombinationen

Bei der Berechnung von Rekombinations- und Ionisationsraten ist anschließend nicht der Grundzustand, sondern die Kontinuumsgrenze als Bezugs punkt gewählt. Es werden die Raten (pro $\text{cm}^3 \text{ sec}$) aller Typen von Prozessen für beide Elektronengruppen aufgestellt, die aus dem Kontinuum heraus in irgendeinen energetisch tieferen angeregten Zustand oder den Grundzustand führen; für jede Prozeßrate ist unmittelbar die Rate des entsprechenden Gegenprozesses aufgeführt, der Elektronen ins Kontinuum zurückschleudert.

Für die Rekombinationsraten, die durch Zweierstöße hervorgerufen werden, d. h. für Strahlungsrekombinationen, ist die Situation sehr einfach: Der Gegenprozeß, Strahlungionisationen, ist vernachlässigbar, wie eine Abschätzung der Koeffizienten für kontinuierliche Absorption zeigt⁶; die Reabsorption von LYMAN-Kontinuumsstrahlung macht allenfalls einige Prozente der Emissionen aus.

Zunächst sei die Gruppe kalter Elektronen hoher Dichte betrachtet. Die Zweierrekombinationsrate in den Grundzustand und in alle angeregten Zustände ergibt sich aus dem Emissionskoeffizienten der Emissionskontinua, dividiert durch die Energie eines Lichtquants, integriert über die Frequenz von der Seriengrenze bis Unendlich und aufsummiert über alle Kontinua^{6, 7} (für die Ionisationsstufe r):

$$S = N_e N_i \frac{64 \sqrt{\pi}}{3\sqrt{3}} h_1 \frac{e^4}{m^2 c^3} \sqrt{\frac{X_H}{k t_e}} \cdot \frac{X_r}{X_H} \cdot n_r \frac{K(X_r/k t_e) X_r/k t_e}{\exp(-X_r/k t_e)} \gamma \quad (2 \text{ a})$$

mit K = Integralexpotentialfunktion. Für Wasserstoff ist $h_1 = 1$. Der Faktor γ berücksichtigt die Rekombinationen in angeregte Zustände:

$$\gamma = \frac{\sum_{n_r}^{n^*} 1/n \cdot K(X_n/k t_e) \cdot X_n/k t_e \cdot \exp(X_n/k t_e)}{(1/n_r) \cdot K(X_n/k t_e) \cdot X_r/k t_e \cdot \exp(X_r/k t_e)}. \quad (2 \text{ b})$$

Bei einer großen Zahl von angeregten Zuständen ist es nur von geringem Einfluß, ob die Summation bis zum maximalen n^* beim effektiven Beginn der kon-

tinuierlichen Zustände oder etwas abweichend vorgenommen wird. Nach ELWERT⁶ gilt hier etwa $\gamma = 3$. Induzierte Emission ist vernachlässigbar. Aus Gl. (2 a, b) ergibt sich hier $S = 2,04 \cdot 10^{14}/\text{cm}^3 \text{ sec}$. Die Berücksichtigung der für Gl. (2 a, b) vernachlässigten GAUNT-Faktoren führt zu einem nur wenig abweichenden Betrag.

Der Beitrag der zusätzlichen energiereichen Elektronen geringer Dichte zur Zweierrekombinationsrate ist verschwindend, da $S \sim N_e^2 / V t_e$ und γ mit zunehmendem t_e abnimmt.

III. Stoßionisationen

Im Anschluß an die Strahlungsprozesse, Strahlungsrekombinationen und Strahlungionisationen werden nun die Stoßprozesse, Stoßionisationen und Dreierrekombinationen betrachtet. In diesem Abschnitt seien nur die Prozesse der energiereichen Elektronen berechnet.

Die gemessenen Besetzungsahlen für den Grundzustand und die angeregten Zustände sind wesentlich höher als thermodynamische Besetzungsahlen N_n^{Saha} für die schnellen Elektronen [nach Gl. (1) für T_e , n_e]. Für thermodynamische Besetzungsahlen würden die Ionisationsraten I_n und Dreierrekombinationsraten D_n gleich sein (Prinzip des detaillierten Gleichgewichts):

$$D_n^{\text{Saha}} - I_n^{\text{Saha}} = 0. \quad (3 \text{ a})$$

Bei abweichenden Besetzungsahlen gilt offensichtlich

$$D_n = D_n^{\text{Saha}}; \quad I_n = I_n^{\text{Saha}} \cdot N_n / N_n^{\text{Saha}}, \quad (3 \text{ b}, \text{c})$$

$$\text{also} \quad D_n - I_n = I_n^{\text{Saha}} (1 - N_n / N_n^{\text{Saha}}). \quad (4)$$

Gl. (4) wird im folgenden Abschnitt direkt gebraucht werden; hier im Falle von Überbevölkerung der Zustände ($N_n / N_n^{\text{Saha}} \gg 1$) besagen die obigen Beziehungen lediglich, daß die Dreierrekombinationen gegen die Stoßionisationen der energiereichen Elektronen vernachlässigbar sind.

Zur Berechnung der Ionisationsrate aus dem Grundzustand sind die gemessenen Ionisationsquerschnitte von FITE und BRACKMANN⁸ benutzt. Die Erweiterung auf die angeregten Zustände erfolgt in Anlehnung an die Betrachtungen von ELWERT⁶. Der alte klassische Ausdruck von THOMSON⁹ ergibt in

⁶ G. ELWERT, Z. Naturforsch. 7 a, 703 [1952].

⁷ A. UNSÖLD, Physik der Sternatmosphären, Verlag Springer,

2. Aufl., Berlin 1955.

⁸ W. L. FITE u. R. T. BRACKMANN, Phys. Rev. 112, 1141 [1958].

⁹ J. J. THOMSON, Phil. Mag. 23, 449 [1912].

einer verallgemeinerten $q_r/s_r(X_{\text{H}}/X_r)^2 \pi a_0^2 - E/X_r$ -Skala (s_r Zahl der gleichberechtigten Elektronen, E Energie des stoßenden Elektrons, X_r Ionisationsenergie für den Zustand r) eine generelle Funktion:

$$q_r/s_r \pi a_0^2 (X_{\text{H}}/X_r)^2 = 4 \cdot \frac{E/X_r - 1}{(E/X_r)^2}. \quad (5)$$

ELWERT hat durch Vergleiche mit verschiedenen gemessenen und gerechneten Werten gezeigt, daß eine solche generelle Funktion mit größerer Genauigkeit erhalten werden kann, wenn ein Korrekturfaktor 1/2 und eine hier weniger wichtige Korrekturfunktion $1 + 0,3(E/X_r - 1)$ benutzt werden (siehe auch SEATON¹⁰). Integriert über die Verteilungsfunktion der Elektronen, ergibt dieser Querschnitt die Ionisationsrate:

$$I_r = N_r \cdot n_e e^4 \sqrt{2 \pi k T_e / m} \cdot s_r (1/X_r^2) \cdot \exp(-X_r/k T_e) G(X_r/k T_e) f_r, \quad (6 \text{ a})$$

$$G(X_r/k T_e) = 0,7 (X_r/k T_e) \left(1 - \frac{K(X_r/k T_e) \cdot X_r/k T_e}{\exp(-X_r/k T_e)} \right) + 0,3. \quad (6 \text{ b})$$

Der Faktor f_r in Gl. (6 a) berücksichtigt hier verbleibende Korrekturen, die aus Vergleichen mit den Messungen von FITE und BRACKMANN in der erwähnten generellen Skala gewonnen sind. Mit anderen Worten: Entsprechend den Untersuchungen von ELWERT, daß eine allgemeine Funktion zumindest als erste Annäherung existiert, sind die Messungen von FITE und BRACKMANN für den Grundzustand als diese generelle Funktion benutzt. Tab. 2 gibt die so bestimmten f_r .

$X_r/k T_e$	0,3	1	3	10	30	100
f_r	0,98	0,86	0,75	0,65	0,58	0,55

Tab. 2. Korrekturfaktoren f_r für Gl. (6 a) für verschiedene $X_r/k T_e$.

Mit den in Teil I bestimmten Werten für T_e , n_e (aus Sondenmessungen) und den N_n folgt eine Ionisationsrate von $I \approx 6 \cdot 10^{15} / \text{cm}^3 \text{ sec}$. Die Beiträge der angeregten Zustände bis $n = 13$ tragen nur mit etwa 10% zu diesem Wert bei und sind im Rahmen der hier erstrebten Genauigkeit nicht wesentlich. Beiträge noch höherer Zustände sind zunächst nicht beachtet, da hier die Ionisationsraten der energiereichen Elektronen nur noch Störungen für die Balance der Stoßprozesse der kalten Elektronen sind (etwa 1/4%.

¹⁰ M. J. SEATON, Atomic and Molecular Processes (herausgeg. von D. R. BATES), New York Academic Press, New York 1962.

oder weniger der Ionisationsraten der kalten Elektronen); dies ist noch näher in Teil IV ausgeführt.

Die quantitative Genauigkeit der angegebenen Ionisationsrate ist durch die Grenzen der Reproduzierbarkeit der Meßergebnisse (Teil I) angedeutet. Im Hinblick auf diese Schwankungen und auch im Hinblick auf die Bemerkungen des folgenden Absatzes wird geschätzt, daß mögliche Ungenauigkeiten allenfalls einen Faktor 3 ausmachen sollten. Eine Genauigkeit in diesen Grenzen reicht völlig aus, um Folgendes herauszustellen: Die Ionisationsrate der energiereichen Elektronen besitzt eine vernünftige Größenordnung, um als Ausgleich für die Rekombinationsrate der kalten Elektronen in Frage zu kommen. Ein genauerer als Größenordnungsmäßiger Vergleich mit der Strahlungsrekombinationsrate der kalten Elektronen (Teil II) zeigt jedoch, daß noch eine zusätzliche, beträchtlich höhere Rekombinationsrate vorliegen muß, falls ein zumindest annähernd lokales Rekombinations-Ionisations-Gleichgewicht vorhanden ist. Eine solche Rate werden die in Teil IV untersuchten Dreierrekombinationen der kalten Elektronen in angeregte Zustände mittlerer Hauptquantenzahl in der Tat liefern.

Die zuvor erwähnten Bemerkungen sind noch nachzutragen: Die Annahme einer MAXWELL-Verteilung bei der Auswertung der Sondenmessungen besagt nicht, daß die schnellen Elektronen notwendig eine vollständige MAXWELL-Verteilung für T_e und n_e besitzen müssen; T_e und n_e können als effektive Temperatur und Dichte, als empirische Werte, betrachtet werden zur Annäherung der Verteilung lediglich der energiereichen Elektronen, die im wesentlichen die Sondencharakteristik bestimmen. (Zudem unterbleibt die Ansammlung der spektroskopisch untersuchten kalten Elektronen während der Sondenmessungen, wie schon früher näher berichtet wurde³.) In ähnlicher Weise sind bei der Berechnung der Ionisationsrate energiereiche Elektronen wesentlich; lediglich eine effektive Beschreibung ihrer Verteilung ist benötigt. Man kann erwarten, daß sich Ungenauigkeiten bei einem solchen Vorgehen zumindest teilweise wegheben und nicht kritisch für das Endergebnis der Ionisationsrate sind. Ähnliche Bemerkungen lassen sich machen im Hinblick auf etwaige räumliche und zeitliche, bei den Sondenmessungen nicht aufgelöste, Strukturen der Verteilung der schnellen Elektronen im interessierenden Plasmabereich; entsprechende Mitteilungen bei Messung und Rechnung würden sich ähneln.

IV. Effektive Dreierrekombinationen

Die Ionisationsrate für die kalten Elektronen hoher Dichte (t_e, N_e) aus dem Grundzustand ist völlig vernachlässigbar, wie man mit Hilfe von Gl. (6 a, b) sieht. Für den Gegenprozeß, die Dreierrekombinationen direkt in den Grundzustand, erhält man eine unbedeutende Rate, etwa 10^{-4} -mal die Zweierrekombinationsrate; das folgt bei Verwendung des Prinzips des detaillierten Gleichgewichts ebenfalls aus (6 a, b). Beide Prozeßtypen wachsen jedoch schnell mit der Quantenzahl; für mittlere Quantenzahlen ergibt die unausgeglichene Balance zwischen ihnen beträchtliche effektive Dreierrekombinationsraten.

1. Bilanz mittlerer Zustände

Gl. (4) aus Teil II — dieses Mal angewandt für t_e und N_e — beschreibt quantitativ die Differenz zwischen der Dreierrekombinationsrate und Ionisationsrate für den Zustand n ; mit I_n^{Saha} nach Gl. (6 a, b) und Gl. (1) folgt $[G(X_n/k t_e)]$ siehe Gl. (6 b), f_r siehe Tab. 1]:

$$D_n^{\text{effektiv}} = D_n - I_n \\ = \left[\frac{N_e^2 N_i}{k t_e} \cdot \frac{h^3 e^4}{2 \pi m^2} \cdot \frac{n^6}{X_H} G(X_n/k t_e) \right] \left[1 - \frac{N_n}{N_n^{\text{Saha}}} \right]. \quad (7)$$

Der linke Klammerausdruck dieser Gleichung nimmt mit wachsendem n schnell zu, nahezu mit n^6 . Für $k t_e/X_n \geq 1$ werden die Stoßprozesse der kalten Elektronen sehr zahlreich und dominierend gegenüber allen anderen Prozessen. Der rechte Klammerausdruck in Gl. (7) wird den Messungen der Tab. 1 entnommen; er nimmt schnell mit wachsendem n ab.

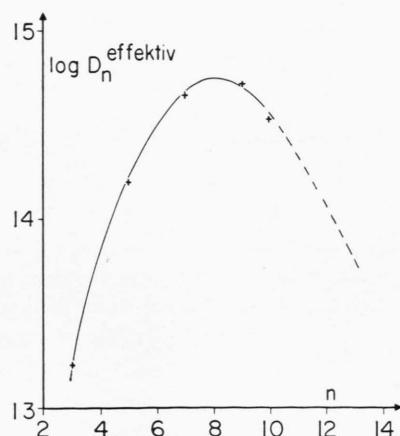


Abb. 1. Effektive Dreierrekombinationsraten D_n^{effektiv} in Abhängigkeit von der Hauptquantenzahl n .

Die Stoßprozesse der kalten Elektronen kommen bei wachsendem n in zunehmendem Maße in Balance und bestimmen immer mehr die Besetzungszahlen; es wird thermodynamische Verbindung mit dem Kontinuum hergestellt. Insgesamt resultiert in Gl. (7) ein Maximum für mittlere Hauptquantenzahlen, das deutlich höher als die Zweierrekombinationsrate S ist. Dies ist in Abb. 1 gezeigt. Nach dem Überschreiten des Maximums ist die Kurve in Abb. 1 für große n extrapoliert, da hier der Faktor $1 - N_n/N_n^{\text{Saha}}$ kleiner als meßtechnische und rechnerische Ungenauigkeiten wird. Die Gesamtrekombinationsrate ist nun $\Sigma D_n^{\text{effektiv}} + S = 3,1 \cdot 10^{15}/\text{cm}^3 \text{ sec}$.

Die Extrapolation in Abb. 1 ist durch den vorhergehenden Kurvenverlauf nahegelegt. Ein Absinken der D_n^{effektiv} für hohe n ist auch grundsätzlich zu erwarten: Die Elektronenverluste pro $\text{cm}^3 \text{ sec}$ z. B. des Zustandes 3 zu tieferen Zuständen sind praktisch nur durch Strahlungsübergänge gegeben (siehe Teil IV. 2 über Stoßquerschnitte). Diese Verluste müssen durch Elektronenzufluß direkt aus der Differenz $D_3 - I_3$ und, vermittelt durch effektive superelastische Stoßübergänge und durch Strahlungsübergänge aus höheren Zuständen, aus deren Differenzen $D_n - I_n$ gedeckt werden. Insgesamt muß die Summe all dieser D_n^{effektiv} die Summe der Strahlungsverluste aller Zustände (von $n \geq 3$ zu $n < 3$) decken, die jedoch schnell konvergiert [$\lesssim \text{const} \cdot \Sigma n^{-5} n^2 \cdot \exp(X_n/k t_e)$]. Für mittlere Hauptquantenzahlen haben aber die D_n^{effektiv} bereits wesentliche Beiträge geliefert, D_n^{effektiv} muß also für hohe n klein werden. Dies trifft um so mehr zu, als Zweierrekombinationen und Anregungsstöße durch die zusätzlichen energiereichen Elektronen aus tiefen Zuständen in die gleiche Richtung wirken wie die D_n^{effektiv} . Ionisationsprozesse der energiereichen Elektronen aus den angeregten Zuständen wirken im entgegengesetzte Richtung und erfordern — insbesondere für hohe n — eine Vergrößerung für D_n^{effektiv} ; bei der hier interessierenden Bilanz aller Prozesse vom und zum Kontinuum hebt sich aber gerade diese Vergrößerung gegen die sie verursachenden Ionisationsraten der schnellen Elektronen weg. In Wirklichkeit sind also für hohe n (etwa $n \geq 14$) die Differenzen zwischen Dreierrekombinationsraten und Ionisationsraten der kalten Elektronen hoher Dichte, die entsprechenden Differenzen für die energiereichen Elektronen und die Zweierrekombinationsraten (Teil II) gemeinsam als klein zu betrachten; dies ist in dem obigen Ergebnis für $\Sigma D_n^{\text{effektiv}} + S$ berücksichtigt.

Die quantitative Genauigkeit des zuvor beschriebenen Verfahrens nach Gl. (7), d. h. die genaue Lage des Maximums für die D_n^{effektiv} , hängt weitgehend von der Genauigkeit relativer Intensitätsmessungen vor allem für mittlere und hohe BALMER-Linien ab. Es war daher notwendig, speziell auf dieses Verfahren abgestellte photoelektrische Relativmessungen mit chopper-Technik durchzuführen, damit die Gesamtrekombinationsraten für verschiedene Meßreihen nicht mehr als allenfalls um einen Faktor 3 abweichen; dieser Faktor berücksichtigt auch kleinere Unsicherheiten der benutzten Ionisationsquerschnitte angeregter Zustände. Die Bestimmung mit dieser Genauigkeit zeigt deutlich die wesentliche Rolle der effektiven Dreierrekombinationen im Vergleich zu den Strahlungsrekombinationen. Das Verfahren nach Gl. (7) vermag die Hauptbeiträge zur Rekombinationsrate bei mittleren Zuständen zu lokalisieren. Der so erhaltene Wert für die Gesamtrekombinationsrate wird durch die Ergebnisse des folgenden Abschnittes innerhalb vernünftiger Grenzen bestätigt.

2. Bilanz tiefer Zustände

Der die Termleiter hinabgleitende Elektronenfluß wurde schon qualitativ im Zusammenhang mit dem Verhalten der D_n^{effektiv} für hohe n betrachtet. Dies sei nun zu einer quantitativen Bilanz erweitert, die nicht mehr wie zuvor lediglich Prozesse vom und zum Kontinuum, sondern auch und vor allem Prozesse innerhalb der diskreten Zustände heranzieht. Zuvor wurde eine effektive Rekombinationsrate aller Prozesse berechnet, die den Ionisationsprozessen der energiereichen Elektronen vom Grundzustand und von angeregten Zuständen ($n < 14$) direkt ins Kontinuum gegenüberstehen; bei der nun beabsichtigten Bilanz wird eine Rekombinationsrate gewonnen, die effektiv vom Zustand 4 (bzw. 3) in tiefere Zustände führt und den Ionisationsraten der energiereichen Elektronen nur aus diesen tiefen Zuständen zum Kontinuum gegenübersteht. Diese Rate ist praktisch gleich der Rate der den Grundzustand effektiv erreichenden Elektronen und nur unweesentlich kleiner als die in Teil IV. 1 berechnete Gesamtrate (an-nähernd 10%), nämlich um den Anteil des vom Kontinuum hinabgleitenden Elektronenflusses, der

schon zuvor durch die heißen Elektronen aus höheren Zuständen in das Kontinuum zurückgeschleudert wird.

Außer den Ionisationen der energiereichen Elektronen, die aus tiefen Zuständen am Zustand $n=4$ vorbei ins Kontinuum führen, werden alle Prozesse berechnet, die den Zustand 4 und höhere Zustände in Richtung tieferer Zustände verlassen und aus diesen zurückführen: Strahlungsübergänge von den diskreten Zuständen $n \geq 4$ (hauptsächlich für $n=4$) in die Zustände $n \leq 3$, effektive superelastische Stoßübergänge der kalten Elektronen hoher Dichte von den Zuständen $n \geq 4$ in die Zustände $n \leq 3$ (praktisch nur vom Zustand $n=4$ zum Zustand $n=3$), Stoßanregungen der energiereichen Elektronen die Termleiter aufwärts von $n \leq 3$ zu $n \geq 4$ (mit hoher Genauigkeit ohne Gegenprozesse und praktisch nur vom Zustand 1, mit $n_e \approx 2,5 \cdot 10^9 \text{ cm}^{-3}$), schließlich Zweier- und Dreierrekombinationen direkt in Zustände unterhalb $n=4$. Die sich ergebende Rate von Elektronen, die effektiv in tiefere Zustände als $n=4$ übergehen, beträgt $4,5 \cdot 10^{15}/\text{cm}^3 \text{ sec}$, in vernünftiger Übereinstimmung mit dem vorher bestimmten Wert (der nach den obigen Bemerkungen um etwa 10% größer zu erwarten ist). Es ist berücksichtigt, daß für tiefe LYMAN-Linien erhebliche optische Dicke vorliegt. Für die Stoßübergangswahrscheinlichkeiten sind die klassisch berechneten Wirkungsquerschnitte von GRYZINSKI¹¹ (siehe auch BATES et al.¹² und BYRON et al.¹³) benutzt, multipliziert mit Korrekturfaktoren f ($0,5 \leq f \leq 1$) in Abhängigkeit von dem Verhältnis $\Delta X/k t_e$; diese Faktoren sind in Anlehnung an das Verfahren bei den Ionisationsquerschnitten aus Vergleichen der berechneten Raten mit denen nach den Messungen von FITE et al.^{14, 10} für die (totalen) Übergänge 1 nach 2 gewonnen. (Mit einer solchen Korrektur fügt sich auch die effektive Stoßrate vom Zustand 5 zum Zustand 4 gut in eine Bilanz aller zum Zustand 4 und von ihm wegführenden Prozesse ein, wobei die gemessenen Besetzungs-zahlen zugrunde gelegt werden.) Die beschriebene Bilanz hängt für den Fall des Zustandes 4 allerdings nicht kritisch von den Korrekturfaktoren ab, zumal sich in diesem Fall die Rate der superelastischen Stoßübergänge der kalten Elektronen hoher Dichte

¹¹ M. GRYZINSKI, Phys. Rev. **115**, 374 [1959].

¹² D. R. BATES, A. E. KINGSTON u. R. W. MCWHIRTER, Proc. Roy. Soc., Lond. A **267**, 297 [1962].

¹³ S. BYRON, R. C. STABLER u. P. I. BORTZ, Phys. Rev. Letters **8**, 376 [1962].

¹⁴ W. L. FITE, Atomic and Molecular Processes (herausgeg. von D. R. BATES), New York Academic Press, New York 1962.

von $n=4$ zu $n=3$ zu einem großen Teil gegen die Raten der Anregungsstöße der energiereichen Elektronen von $n=1$ zu $n \geq 4$ weghebt; man kann erwarten, daß zumindest die Verhältnisse der Stoßübergangswahrscheinlichkeiten recht gut durch die benutzten Rechnungen wiedergegeben werden (siehe auch quantenmechanische Betrachtungen bei SEATON¹⁰). Ungenauigkeiten für die angegebene Rekombinationsrate sollten einen Faktor 2 nicht überschreiten.

Entsprechende Betrachtungen lassen sich beim Zustand 3 durchführen. Mit ähnlicher Genauigkeit wie oben erhält man eine Rate $4,6 \cdot 10^{15}/\text{cm}^3 \text{ sec}$. In diesem Falle ist die Berücksichtigung der Anregungsstöße durch die energiereichen Elektronen wesentlicher als im vorhergehenden Falle; sie führt zu konsistenten, dicht beieinander liegenden Werten für die Rekombinationsrate.

Es können auch Bilanzen bei höheren Zuständen herangezogen werden; sie ergeben jedoch keine zusätzliche Genauigkeit. Eine Bilanz beim Zustand 2 ist durch die optische Dicke der La -Linie erschwert, läßt sich jedoch zwanglos in die bisherigen Betrachtungen einfügen.

V. Zusammenfassung und Diskussion

Die effektiven Dreierrekombinationsraten der kalten Elektronen für angeregte Zustände mittlerer Hauptquantenzahlen sind insgesamt wesentlich höher als die Zweierrekombinationsrate. Die Gesamtrekombinationsrate stimmt mit der Ionisationsrate für die zusätzlichen energiereichen Elektronen gut innerhalb der Fehlertgrenzen überein¹⁵. Somit besteht die Möglichkeit eines – zumindest annähernd lokalen Rekombinations-Ionisations-Gleichgewichts, wobei eine Gruppe kalter Elektronen relativ hoher Dichte im wesentlichen die Rekombination, eine energiereiche Elektronengruppe die Ionisation besorgt. Dies paßt gut zu dem phänomenologischen Eindruck der betrachteten Plasmaballung. Die energiereichen Elektronen rufen genügend Ionisation hervor, um die dauernd zerfallende kalte Plasmaballung nachzuverzeugen und stationär zu erhalten. Damit ist verständlich, daß die spektroskopischen Untersuchungen

trotz der Stationarität des Plasmas Unterbevölkerungen zeigen, an sich charakteristisch für ein zerfallendes Plasma; für ein stationäres Plasma in nicht-thermodynamischem Gleichgewicht wären Überbevölkerungen zu erwarten, wenn nur eine Elektronengruppe vorläge.

Das in Teil IV. 1 benutzte Verfahren für die Rekombinationsrate stützt sich im wesentlichen auf eine Reihe gemessener, relativer Besetzungszahlen – begünstigt durch die stationären Versuchsbedingungen – und theoretische Werte lediglich für die Ionisationsquerschnitte, die hier an Messungen für den Grundzustand angelehnt sind. Der Einfluß von Stoßanregungen der zusätzlichen energiereichen Elektronen und der weitgehender optischer Dicke für LYMAN-Linienstrahlung ist automatisch eingeschlossen. Das in Teil IV. 2 benutzte Verfahren berücksichtigt solche Effekte direkt: Hier ist die Kenntnis von Anregungsquerschnitten notwendig; es sind Wirkungsquerschnitte verwandt, die an die Rechnungen von GRYZINSKI¹¹ angelehnt, jedoch etwas kleiner sind als die sich nach diesen Rechnungen ergebenden Absolutwerte. In Teil IV. 2 ist eine absolute Messung der Besetzungszahl eines der tiefen Zustände wesentlich, die hier ohne erhebliche Meßfehler durchgeführt werden konnte. Bei Einschluß der Anregungsstöße der zusätzlichen energiereichen Elektronen (insbesondere im Falle $n=3$) ergeben sich konsistente Werte für die Gesamtrekombinationsrate.

Die hier erhaltene Rate ist größer als die von D'ANGELO¹⁶ berechnete (für eine Elektronengruppe); D'ANGELO verfolgte im einzelnen das Schicksal der die Termleiter herunterfallenden Elektronen, berücksichtigte jedoch dabei nur Strahlungsübergänge; er verwandte dagegen verhältnismäßig große Ionisationsquerschnitte. BATES, KINGSTON und McWHIRTER^{17, 18, 12} berücksichtigten auch die Übergänge durch superelastische Stöße mit Wirkungsquerschnitten nach GRYZINSKI¹¹ und erhielten höhere Raten als D'ANGELO (siehe auch Rechnungen von HINNOV und HIRSCHBERG¹⁹ besonders für He-Experimente im B-1 Stellarator und annähernde Rechnungen von BYRON et al.¹³). Die hier erhaltene Rate bestätigt im wesentlichen die nach BATES et al. (für eine Elektronengruppe) bei den hier verwandten Temperatur-

¹⁵ Molekülprozesse sind vernachlässigt, da hier das Molekülspktrum extrem unterdrückt ist.

¹⁶ N. D'ANGELO, Phys. Rev. **121**, 505 [1961].

¹⁷ D. R. BATES u. A. E. KINGSTON, Nature, Lond. **189**, 652 [1961].

¹⁸ R. W. P. McWHIRTER, Nature, Lond. **190**, 902 [1961].

¹⁹ E. HINNOV u. J. G. HIRSCHBERG, Proc. Fifth Int. Conf. on Ionization Phenomena in Gases, North Holland Publishing Co., Amsterdam 1961, Vol. I, p. 638; Phys. Rev. **125**, 795 [1962].

und Dichtewerten zu erwartende Rate, die etwa um einen Faktor 2,7 höher ist. Dieser quantitative Unterschied ist gut verständlich im Hinblick auf die angegebenen Fehlergrenzen und im Hinblick auf die zur Zeit noch nicht sehr sichere Kenntnis von Anregungsquerschnitten, die in die Rechnungen eingehen; zudem haben die Anregungsstöße der hier zusätzlich anwesenden energiereichen Elektronen und

die weitgehende optische Dicke der LYMAN-Strahlung die Tendenz, die Rekombinationsrate etwas zu erniedrigen.

Für die Unterstützung dieser Untersuchungen bin ich sehr dankbar dem Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München, und der National Science Foundation.

On Drift Instabilities in a Collisionless Electron-Proton Plasma from the point of view of Energy Absorption of Resonant Particles

By ASBJØRN KILDAL *

Association EURATOM-CEA, Fontenay-aux-Roses (Seine), France
(Z. Naturforschg. **18 a**, 446—453 [1963]; eingegangen am 10. September 1962)

The present paper is essentially devoted to the study of instabilities of electrostatic waves in a current-carrying collisionless plasma. As the underlying physical cause of the instabilities is the same as that of the LANDAU damping in an electron plasma, a detailed analysis of the latter is first given. It is shown that the damping may be considered as being due to the fact that there are more electrons in the phase-region where energy is absorbed by the particles from the field than in the phase-region where energy is given up to the field.

We then proceed to the evaluation of the energy absorption A of the resonant particles, first in the absence of an external magnet field, \mathbf{B}_0 , next when the wave is propagated under an arbitrary angle with respect to \mathbf{B}_0 . When $A > 0$, the wave is damped, and vice-versa. Without appeal to a dispersion equation, stability criteria can thus be found, dependent on the wave frequency and wave-vector. Next some special cases are investigated and compared with the results of other authors where such results exist.

As a consequence of the fact that some ions and electrons, the resonant particles, experience a constant electric field, these particles also experience a constant drift transverse to both \mathbf{E} and \mathbf{B}_0 . This drift gives rise to a transverse current which is closely related to the damping or growing of the wave. An expression for this current, averaged over one wave-length is found.

I. Introduction

In the latest years many authors have been investigating the stability of two interpenetrating components of a plasma when particle-collisions are neglected. This phenomenon is of considerable interest in the study of ionized gas discharges, klystrons, thrototrons and perhaps the most important, in the study of different fusion experiments.

The first theoretical investigation of instabilities of this kind was done by PIERCE¹ and HAEFF². They showed that two interpenetrating streams with no thermal motions can be unstable. A physical explanation of this kind of instability was given by BOHM and GROSS³.

Later BUNEMAN^{4, 5} studied two-stream instabilities thoroughly and found some stability criteria.

When thermal motions are taken into account, the phenomena become more complicated, and the physical cause of the instability or damping is more obscure.

To solve the adequate dispersion equation for the problem, different approximations must be made. JACKSON⁶ and PENROSE⁷ employed the Nyquist criterium and were able to find some general criteria for stability of a wave propagating in a collisionless many component plasma without external fields.

While PENROSE used non-Maxwellian distribution functions for the different plasma constituents, A. JACKSON⁸ studied the stability of two Maxwellian

* Permanent address: Department of Mathematics, University of Bergen, Bergen (Norway).

¹ J. P. PIERCE, Proc. Inst. Radio Engrs. **37**, 980 [1949].

² A. V. HAEFF, Proc. Inst. Radio Engrs. **37**, 4 [1949].

³ D. BOHM and E. P. GROSS, Phys. Rev. **75**, 1864 [1949].

⁴ O. BUNEMANN, Phys. Rev. Letters **1**, 104 [1958].

⁵ O. BUNEMANN, Phys. Rev. **115**, 513 [1959].

⁶ J. D. JACKSON, Plasma Phys. (J. Nucl. Energy, Part C) **1**, 171 [1960].

⁷ O. PENROSE, Phys. Fluids **3**, 258 [1960].

⁸ E. A. JACKSON, Phys. Fluids **3**, 786 [1960].